Problemes

La secció de problemes de la *SCM/Notícies* té atents, amables i competents lectors que ens han enviat les solucions de *tots* els problemes proposats al número anterior!

Hem rebut una solució del problema **A77** del professor Joaquim Nadal Vidal, que també ens resol els altres tres problemes, l'**A78**, l'**A79** i l'**A80** i ens proposa enunciats. Moltes gràcies!

El professor J. Monterde, des de València, ens envia la solució de l'**A79** i el professor Miquel Amengual la de l'**A80** junt amb un nou enunciat, derivat d'aquest. Altra vegada, el nostre agraïment a tots els qui col·laboren en aquesta secció.

De les solucions rebudes del problema **A80** hem preferit publicar la del proponent, l'estudiant Xavi Ros, perquè ens recorda molt l'estil d'aquelles velles demostracions que la matemàtica hindú antiga feia de teoremes geomètrics com el de Pitàgores: un simple *"Mira!"*.

Queda pendent, però, la resolució del problema **A76**, proposat en el número 23 de *SCM/Notícies*. Animeu-vos, que és geometria de la bona!

Us tornem a recordar que, si treballeu amb TEX o LaTEX, ens evitareu moltíssima (i ingrata) feina de transcripció del vostre treball i que les adreces de correu per enviar-nos-el són cromero@xtec.cat, o bé, carles.romero.c@gmail.com. Fins aviat!

Problemes proposats

A81. (Proposat a la fase espanyola de la XLIV Olimpíada Matemàtica, València, 29 de març de 2008.) Hom assigna un color, d'entre c colors disponibles, a cadascun dels punts del pla. Vegeu si és que hi ha algun trapezi inscriptible en un cercle, de manera que els seus quatre vèrtexs tinguin el mateix color.

A82. (Proposat per la redacció.) Per a qualsevol nombre natural n definim

$$\begin{aligned} f(n) &= 1! + 2! + 3! + \cdots + (n-1)! + n! \\ &= \sum_{i=1}^{n} i! \end{aligned}$$

Trobeu tots els valors de n pels quals $f(n)$ és un quadrat perfecte.

A83. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.) Sigui $\triangle ABC$ un triangle amb costats a, b i c i medianes respectives m_a, m_b i m_c. Sigui $\triangle PQR$ el triangle que té per costats m_a, m_b i m_c. Sigui r el radi de la circumferència inscrita al triangle $\triangle ABC$ i sigui ρ el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\triangle PQR$. Demostreu que

$$\rho \geq r\sqrt{3}$$

En quines condicions hi ha igualtat?

A84. (D'una recopilació de problemes d'olimpíades iberoamericanes.) En un triangle $\triangle ABC$ el cercle inscrit és tangent al costat BC en el punt D i el cercle exinscrit oposat al vèrtex B és tangent al costat BC en el punt E. A més, $AD = AE$. Demostreu que $2\widehat{C} - \widehat{B} = 180°$.

Solucions

A77. (Proposat per Gerard Planes Conangla, estudiant, FME, UPC.) Un nombre finit m de pagesos participa en un concurs per tal de saber quin d'ells és més bon negociant. Inicialment, tots ells tenen la mateixa quantitat de diners, i comencen invertint-los en un nombre finit n de parcel·les de conreu, tot seguint sempre aquest mateix patró: cada comprador indica els diners que vol invertir en cadascuna de les n parcel·les (no hi ha cap preu prefixat) i, de cada parcel·la, se n'endú la fracció

$$F_i = \frac{d_i}{x_i},$$

on $d_i \in \mathbb{R}$ representa els diners que ha decidit

A79. (D'una olimpíada universitària iberoamericana.) Els divisors positius d'un nombre enter positiu n estan escrits en ordre creixent a partir del nombre 1, i fins a n:

$$1 = d_1 < d_2 < d_3 < \cdots < n\,.$$

S'ha de trobar la n que compleix:

$$\begin{array}{ll} i) & n = d_{13} + d_{14} + d_{15} \\ ii) & (d_5+1)^3 = d_{15} + 1\,. \end{array}$$

Solució: (Solució de J. Monterde. Departament de Geometria i Topologia. Facultat de Matemàtiques. Universitat de València.) Dividim l'equació $i)$ $n = d_{13} + d_{14} + d_{15}$ per n. El resultat és de la forma

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

amb a, b i c nombres naturals que podem suposar $a > b > c > 1$. L'única possibilitat és $a = 6$, $b = 3$ i $c = 2$. Per tant,

$$n = 2d_{15} = 3d_{14} = 6d_{13}\,.$$

Així, els quatre primers divisors de n són 1, 2, 3 i 6.

La segona condició, $ii)$ $(d_5+1)^3 = d_{15} + 1$ es pot reescriure com a

$$d_5(d_5^2 + 3d_5 + 3) = d_{15}$$

i, com que 3 és un divisor de $n = 2d_{15}$, també ho és de $d_{15} = d_5(d_5^2+3d_5+3)$, la qual cosa implica que 3 divideix d_5. Això vol dir que, com que d_5 és el cinquè divisor de n, aleshores $d_5 = 9$.

La segona condició es pot llegir ara com a

$$10^3 = d_{15} + 1$$

és a dir, $d_{15} = 999$ i, per tant,

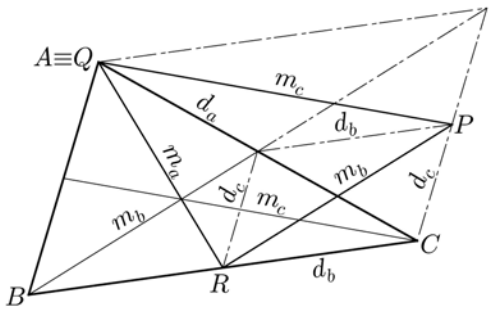
$$n = 1998$$

A80. (Proposat per Xavi Ros Otón, estudiant, FME (UPC).) Sigui $\triangle ABC$ un triangle amb medianes m_a, m_b i m_c. Sigui $\triangle PQR$ el triangle que té per costats m_a, m_b i m_c i siguin d_a, d_b i d_c les distàncies del baricentre d'aquest triangle als seus vèrtexs. Demostreu que:

$$\begin{array}{ll} a) & d_a + d_b + d_c = p \\ b) & [PQR] = \dfrac{3}{4}[ABC] \end{array}$$

on p i $[ABC]$ denoten, respectivament, el semiperímetre i l'àrea del $\triangle ABC$.

Solució: (Solució del proponent.) Vegeu!



Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga

Tesis

- Francisco Palacios Quiñonero va llegir la seva tesi, dirigida per Pere Rubió i Díaz, titulada *Contribució al problema d'interpolació de Birkhoff*, el dia 20 de desembre de 2004. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada III de la Universitat Politècnica de Catalunya.